

MATEMATICA

A. IMPOSTAZIONE GENERALE DELL'INSEGNAMENTO

La matematica nel contesto interdisciplinare delle scienze sperimentali

Questo programma – inteso dal gruppo disciplinare del Liceo di Lugano 1 come programma minimo – è basato, per ciò che concerne gli aspetti fondamentali dell'insegnamento, sui documenti cantonali *Obiettivi del settore di studio Matematica e scienze sperimentali* (1997), *Aspetti metodologici* (1997), *Classificazione cognitiva degli obiettivi di apprendimento* (1997), disponibili in tutti gli Istituti.

In particolare l'organizzazione del nuovo liceo, che prevede la presenza simultanea di fisica, chimica e biologia nel primo anno, offre alla matematica un'occasione assai notevole di *cooperare interdisciplinarmente* con le scienze sperimentali. Un'ulteriore (e ancora più qualificata) occasione di interdisciplinarietà sarà fornita dalle opzioni specifiche di carattere scientifico, 'fisica e applicazioni della matematica' e 'chimica e biologia', alle quali si accederà attraverso una matematica 'forte'.

Non facile, e tuttavia possibile, sarà la realizzazione di tale cooperazione interdisciplinare, una delle idee-cardine del nuovo ordinamento. La matematica continuerà, da un lato, a ricoprire quello che è stato un suo fondamentale ruolo storico (fornire alle scienze sperimentali *strumenti* per l'indagine e la formulazione delle leggi); dall'altro non mancherà di svolgere una funzione di collegamento e di stimolo: si potrebbe dire una funzione 'unificante', se il termine non suonasse eccessivamente ambizioso.

B. OBIETTIVI E ARGOMENTI DI STUDIO

CLASSE PRIMA

Obiettivi generali e specifici

L'allievo che, provenendo dalla Scuola Media, arriva al Liceo possiede indubbiamente alcune nozioni e competenze di carattere matematico (calcolo aritmetico e letterale, elementi di geometria) ma ha, d'altro canto – com'è sin troppo facile verificare – scarsa familiarità con il procedimento deduttivo, debole senso critico di fronte ai concetti e all'esigenza di rigore della matematica, incerto metodo, scarsa abitudine al lavoro autonomo.

Il primo anno del corso liceale si propone dunque di avvicinare l'allievo al *discorso matematico* vero e proprio, definendo con precisione e analizzando alcuni semplici ma fondamentali concetti, dimostrando proposizioni, ricercando soluzioni mediante un'intuizione che vada man mano sviluppandosi; il tutto nel superamento di un apprendere puramente mnemonico e meccanico.

Gli 'oggetti' matematici di cui il docente si servirà per svolgere quest'opera di educazione alla riflessione saranno di natura semplice, adatta a una fase di iniziazione ed apprendistato: equazioni e disequazioni sino al II grado (gradi superiori solo in forme particolari), funzioni elementari (polinomiali, fratte e radicali, valore assoluto), geometria del triangolo e della circonferenza.

Evitando gli estremi, una giusta via di mezzo potrà essere trovata tra la pratica del metodo *euristico* (al fine di sviluppare nell'alunno il gusto per la ricerca della soluzione di un problema) e un grado opportuno di *formalizzazione* del discorso, non dimenticando mai

che un livello anche moderato di *astrazione* costituisce per un ragazzo di quindici anni una grave difficoltà.

Il laboratorio di matematica

Dal settembre 1997 in Italiano e matematica in prima si impartisce la quarta ora secondo la modalità del 'laboratorio' (classi dimezzate). Si tratta di una forma d'insegnamento particolarmente vantaggiosa, poiché la presenza in classe di un effettivo ridotto permette al docente di prestare una più puntuale attenzione ai 'bisogni' del singolo studente. L'ora di laboratorio costituisce sede di specifiche *esercitazioni* atte a uno svolgimento in gruppo ristretto, oppure sede di *approfondimento*, mentre non sembra opportuno – per ragioni evidenti – che essa sia dedicata a esposizioni 'ex cathedra'.

Argomenti di studio

Algebra

- Richiami sugli insiemi numerici N , Z e Q , con particolare riguardo alle proprietà algebriche e di ordinamento. Necessità dei numeri irrazionali. Il corpo R e la retta dei numeri reali.
- Moltiplicazione di polinomi; prodotti notevoli. Divisione di polinomi; teorema di Ruffini. Fattorizzazione di polinomi.
- Calcolo di potenze con esponente intero. Radice n -esima aritmetica di un numero reale positivo. Radicali e potenze con esponente razionale.
- Calcolo approssimato. Numeri molto grandi e molto piccoli: notazione scientifica.

Funzioni reali

- Richiami sulle funzioni: concetto, proprietà e rappresentazione grafica di una funzione reale nel piano cartesiano; funzione inversa e composizione di funzioni.
- Funzione lineare e funzione affine. Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni di primo grado. Sistemi di primo grado: metodi pratici di risoluzione. Risoluzione di equazioni razionali fratte.
- Funzione quadratica. Formula risolutiva di un'equazione di secondo grado. Segno di una funzione quadratica; disequazioni di secondo grado.
- Problemi di 1° e 2° grado. Problemi di massimo /minimo.
- Funzione radice n -esima. Risoluzione di equazioni irrazionali.
- Funzione valore assoluto. Risoluzione di semplici equazioni e disequazioni in cui figurano valori assoluti.

Geometria

- Criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli.
 - Proprietà delle principali figure piane.
 - In particolare: circonferenza, angoli alla circonferenza, tangenti alla circonferenza.
- N.B.: *Elementi di logica* verranno introdotti a seconda delle necessità, quando saranno ritenuti utili per una migliore comprensione dei contenuti.

Classi dalla seconda alla quarta

Il nuovo ordinamento prevede che alla matematica 'unificata' di prima faccia seguito in seconda la separazione in *corso normale* e *corso forte*. Benché i due programmi, per quanto attiene ai contenuti, non presentino disparità molto grandi, è chiaro che gli obiettivi vi nel corso forte saranno necessariamente più ambiziosi, dal momento che gli allievi di tale corso si apprestano ad accedere alla terza imboccando quello che può essere definito il 'curricolo scientifico' del nuovo liceo, con le sue due possibili opzioni specifiche. Gli strumenti geometrici (analitici, vettoriali, trigonometrici) sono destinati a trovare - per gli studenti del corso forte - campi di applicazione più vasti (soprattutto in fisica) e lo stesso dicasi del calcolo logaritmico e della statistica (nel complesso delle scienze sperimentali).

Gli obiettivi potrebbero essere sintetizzati così. *Corso forte*: affinamento tecnico, concettualizzazione maggiore e preparazione all'apertura interdisciplinare. *Corso normale*: formazione solida, ma più limitata e tecnicamente meno esigente, magari arricchita da qualche escursione 'umanistica' che possa toccare la sensibilità degli allievi.

Il laboratorio di matematica

Il Gruppo disciplinare d'istituto, dovendo scegliere – per le seconde – tra il laboratorio (1 ora settimanale impartita a classi dimezzate) e la vecchia ora di sostegno ha deciso di lasciare aperte entrambe le possibilità, nei limiti imposti dalla dotazione oraria di sede.

Corso normale

CLASSE SECONDA (3 ore settimanali)

Obiettivi e percorsi didattici

Il programma normale si caratterizza per una forte predominanza dell'elemento geometrico: una trigonometria che potremmo dire 'semplice e pratica', relativa al triangolo rettangolo e al triangolo qualunque, capace soprattutto di fornire un prezioso strumento per risolvere problemi metrici, e priva di un corredo di formule e di generalità eccessivamente gravose; i fondamenti del calcolo vettoriale con applicazioni a 2 e a 3 dimensioni; l'analitica 'minima' (retta e circonferenza) trattata in stile tradizionale o anche con metodi vettoriali. Non si prevedono elementi di calcolo logaritmico (che saranno necessariamente introdotti in terza) e neppure un approccio al calcolo delle probabilità. Il primo contatto dello studente con i grandi numeri avverrà sul terreno della statistica descrittiva.

Argomenti di studio

Trigonometria

- L'unità naturale per la misura degli angoli: il radiante.
- Definizione delle funzioni trigonometriche.
- Relazioni tra valori per argomenti opposti, complementari, supplementari.
- Identità fondamentali.
- Equazioni trigonometriche elementari.
- Problemi geometrici riconducibili alle relazioni tra elementi di un triangolo rettangolo.
- Teoremi del seno e del coseno.
- Applicazioni alle scienze sperimentali e ad altri campi.

Geometria (vettori e analitica)¹

- Vettori geometrici e algebrici nel piano e nello spazio.
- Addizione vettoriale e moltiplicazione di un vettore per uno scalare.
- Combinazione lineare di vettori.
- Allineamento e complanarità di punti nello spazio.
- Concetto di base limitatamente agli spazi a 2 e a 3 dimensioni.
- Prodotto scalare.
- Metodi vettoriali applicati alla geometria (a 2 e a 3 dimensioni), alle scienze sperimentali e ad altri campi.
- La retta nel piano cartesiano. Parallelismo e perpendicolarità. Distanza punto-retta.
- La circonferenza come luogo geometrico.

Statistica descrittiva

- Raccolta ed elaborazione dei dati: suddivisione in classi e frequenze. Rappresentazioni grafiche: tabelle e diagrammi.
- I problemi della centralità e della dispersione.
- Medie, varianza e scarto tipo.

CLASSE TERZA (3 ore settimanali)

Obiettivi e percorsi didattici

- Sviluppare metodi di geometria analitica e vettoriale ed applicarli alla geometria del piano e dello spazio;
- prendere confidenza con i metodi stocastici, affrontando alcuni problemi della matematica dell'incerto;
- accostarsi al concetto chiave di limite per le successioni e le funzioni, prima intuitivamente, poi in forma rigorosa; acquisire il concetto di continuità ed individuare le proprietà caratteristiche di una funzione continua.

Argomenti di studio

Geometria vettoriale e analitica

- Prodotto vettoriale e prodotto misto.
- Rappresentazione algebrica di rette e piani.
- Incidenza, parallelismo, ortogonalità, angoli.
- Distanze, aree, volumi.
- Risoluzione di semplici problemi di geometria tridimensionale.

Calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità

- Permutazioni, disposizioni e combinazioni (senza ripetizione).
- Nozione di probabilità.
- Probabilità condizionata, eventi indipendenti.
- Probabilità totali.
- Prove ripetute.

¹ Nella presente stesura di argomenti *vettori* e *analitica* sono organizzati in un unico capitolo denominato *Geometria*, al fine di privilegiare il metodo vettoriale nel contesto geometrico.

Limiti

- Struttura e proprietà del corpo \mathbb{R} .
- Funzioni: generalità.
- Limiti di funzioni reali, continuità.

Eventualmente si potranno aggiungere:

- Successioni in \mathbb{R} , limiti di successioni.
- Serie geometrica.

CLASSE QUARTA (4 ore settimanali)

Obiettivi e percorsi didattici

- Prendere contatto con i problemi che stanno alla base del calcolo differenziale e integrale.
- Saper usare le tecniche basilari del calcolo infinitesimale.
- Sapere operare con sicurezza nelle applicazioni caratteristiche dell'analisi.

Argomenti di studio

Derivate

- Concetto di derivata e sua interpretazione geometrica.
- Derivate delle funzioni elementari, tecniche di derivazione.
- Teoremi sulle funzioni derivabili.
- Studio di funzioni.
- Problemi di massimo e minimo.

Logaritmi

- Potenze ad esponente reale.
- Logaritmi: regole di calcolo.
- Funzione esponenziale e funzione logaritmica.
- Crescita e decadimento esponenziale.
- Modelli matematici di crescita di una popolazione.

Integrali

- Integrale definito e sua interpretazione geometrica.
- Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.
- Funzioni primitive.
- Integrazioni immediate.
- Applicazioni del calcolo infinitesimale: calcolo di aree e di volumi di rotazione.

Corso forte (5 ore settimanali)

CLASSE SECONDA

Obiettivi e percorsi didattici

Il programma forte, pur non differendo nei temi fondamentali dal programma normale (con una eccezione), si contraddistingue per un approfondimento molto maggiore e per il fatto di precludere alle opzioni specifiche ('fisica e applicazioni della matematica', o 'biologia e chimica') del terzo anno. In trigonometria ci si avvarrà delle formule di addizione e di altre notevoli formule da esse derivate. Si studieranno le funzioni armoniche, il cui ruolo è centrale nella teoria dei fenomeni ondulatori. Il calcolo vettoriale sarà trattato in uno stile più concettuale (struttura, isomorfismo, indipendenza) aprendo la via verso i metodi dell'algebra lineare. Il classico capitolo delle coniche completerà la geometria analitica elementare. Saranno introdotte le funzioni esponenziali e le regole del calcolo logaritmico. La statistica descrittiva sarà invece trattata come nel programma normale.

Argomenti di studio

Trigonometria

- L'unità naturale per la misura degli angoli: il radiante.
- Definizione delle funzioni trigonometriche.
- Relazioni tra valori per argomenti opposti, complementari, supplementari.
- Identità fondamentali.
- Equazioni trigonometriche: alcuni casi riconducibili a una o più equazioni elementari.
- Problemi geometrici riconducibili alle relazioni tra elementi di un triangolo rettangolo.
- Teoremi del seno e del coseno con applicazioni ai triangoli qualunque.
- Studio delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse.
- Non linearità delle funzioni stesse: formule di addizione e qualche formula conseguente.
- Grafici di funzioni del tipo $y = a \cdot \cos(t)$.
- Applicazioni alle scienze sperimentali e ad altri campi.

Geometria (vettori e analitica)

- Vettori geometrici e algebrici nel piano e nello spazio.
- Addizione vettoriale e moltiplicazione di un vettore per uno scalare.
- Struttura di spazio vettoriale.
- Combinazione lineare di vettori.
- Dipendenza e indipendenza lineare. Il concetto di dimensione.
- Concetto di base limitatamente agli spazi a 2 e a 3 dimensioni.
- Isomorfismo tra gli spazi vettoriali geometrico e algebrico.
- Prodotto scalare.
- Metodi vettoriali applicati alla geometria (a 2 e a 3 dimensioni), alle scienze sperimentali e ad altri campi.
- La retta nel piano cartesiano. Parallelismo e perpendicolarità. Distanza punto-retta.
- Le coniche come luoghi geometrici.

Funzioni esponenziali e logaritmiche

- La funzione esponenziale. Definizione; proprietà; grafico.
- La funzione logaritmica come inversa della funzione esponenziale. Proprietà. Grafico.
- Logaritmi: definizione e regole di calcolo.
- Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.
- Applicazioni alle scienze sperimentali e ad altri campi.

Statistica descrittiva

- Raccolta ed elaborazione dei dati: suddivisione in classi e frequenze. Rappresentazioni grafiche: tabelle e diagrammi.
- I problemi della centralità e della dispersione.
- Medie, varianza e scarto tipo.

CLASSE TERZA

Obiettivi e percorsi didattici

- Sviluppare metodi di geometria analitica e vettoriale ed applicarli alla geometria del piano e dello spazio;
- prendere confidenza con i metodi stocastici, affrontando alcuni problemi della matematica dell'incerto;
- acquisire la nozione di variabile aleatoria discreta e di distribuzione, conoscere almeno la distribuzione binomiale;
- accostarsi al concetto chiave di limite - per le successioni e le funzioni -, prima intuitivamente, poi in forma rigorosa; acquisire il concetto di continuità ed individuare le proprietà caratteristiche di una funzione continua;
- definire rigorosamente la convergenza di una serie numerica e stabilire opportuni criteri di convergenza;
- capire l'importanza dei numeri complessi.

Argomenti di studio

Geometria vettoriale e analitica

- Prodotto vettoriale e prodotto misto.
- Rappresentazione algebrica di rette e piani.
- Incidenza, parallelismo, ortogonalità, angoli.
- Distanze, aree, volumi.
- Sfera e piano tangente alla sfera.
- Risoluzione di problemi di geometria tridimensionale.

Calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità

- Analisi combinatoria.
- Nozione di probabilità.
- Probabilità condizionata, eventi indipendenti.
- Probabilità totali.
- Prove ripetute.
- Variabili aleatorie discrete.

- Speranza matematica e varianza.
- Distribuzione binomiale.

Analisi

- Struttura e proprietà del corpo \mathbb{R} .
- Funzioni: generalità.
- Successioni in \mathbb{R} , limiti di successioni.
- Serie geometrica.
- Serie numeriche, convergenti, divergenti, criteri di convergenza.
- Limiti di funzioni reali, continuità.

****Serie numeriche**

- Serie numeriche: convergenti, divergenti, criteri di convergenza. Serie geometrica, serie armonica.

***Numeri complessi**

- Costruzione del corpo \mathbb{C}
- Rappresentazione di \mathbb{C} nel piano di Gauss.
- Numeri complessi in forma polare.
- La formula di Moivre.
- Radici n -esime di un numero complesso.

***Algebra lineare**

- Matrici. Determinante di una matrice quadrata.
- Sistemi lineari. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali.

N.B.: * temi da trattare eventualmente
 ** tema da trattare in terza o in quarta

CLASSE QUARTA

Obiettivi e percorsi didattici

- Prendere confidenza con le problematiche che stanno alla base del calcolo differenziale e integrale.
- Conoscere le tecniche del calcolo infinitesimale.
- Sapere operare con sicurezza nelle applicazioni caratteristiche dell'analisi.

Argomenti di studio

Analisi

- Concetto di derivata e sua interpretazione geometrica.
- Derivate delle funzioni elementari, tecniche di derivazione.
- Teoremi sulle funzioni derivabili.
- Differenziale di una funzione.
- Risoluzione approssimata di equazioni con il metodo di Newton.

- Calcolo di limiti di forme indeterminate.
- Sviluppi in serie di funzioni.
- Studio di funzioni.
- Problemi di massimo e minimo.

****Serie numeriche**

- Serie numeriche: convergenti, divergenti, criteri di convergenza. Serie geometrica, serie armonica.

Integrale definito e sua interpretazione geometrica

- Teorema del valore medio e teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.
- Funzioni primitive.
- Tecniche d'integrazione (sostituzione e per parti: casi semplici).
- Applicazioni del calcolo infinitesimale: aree, volumi, lunghezze, superfici.

Probabilità

- Variabili aleatorie continue.
- Densità di probabilità.
- Distribuzione normale, distribuzione normale standardizzata.
- Relazione tra le distribuzioni binomiale e normale.

***Equazioni differenziali**

- Equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine.
- Nozioni generali e teorema di Cauchy.
- Metodi di risoluzione mediante integrazione immediata, separazione delle variabili, variazioni della costante.

N.B.: * tema da trattare eventualmente

** tema da trattare se non già trattato in terza

C. INDICAZIONI GENERALI DI METODO

Si rimanda alla precedente sezione A, *Impostazione generale dell'insegnamento* e ai paragrafi intitolati *Obiettivi e percorsi didattici* nella sezione B, *Obiettivi e argomenti di studio*.

D. CRITERI GENERALI DI VALUTAZIONE

La valutazione serve a stabilire in quale misura gli obiettivi specifici della disciplina - non solo i singoli capitoli del *programma*, ma soprattutto quella 'maturazione del pensiero dell'allievo mediante la riflessione matematica' che resta il fine primario dell'insegnamento della materia - siano stati raggiunti. Essa sarà fondata su un congruo numero di lavori scritti da eseguire in classe, ma si terrà parimenti conto delle prove orali, della partecipazione e d'altro (per esempio di particolari compiti o ricerche da svolgersi a casa). Una sostanziale armonizzazione nei criteri di giudizio adottati dai vari docenti è auspicabile: questi ultimi potranno conseguirla e conservarla scambiandosi

frequentemente le loro esperienze e confrontando, in un momento di riflessione comune, gli obiettivi posti con l'esito dell'insegnamento impartito.